Phần A

Bài 1:

Định lí: Một đồ thị có chu trình Euler khi và chỉ khi nó là đồ thị liên thông không tồn tại đỉnh bậc lẻ.

Xét các đồ thị đã cho:

* Đồ thị 1:

0-1 0-2 0-3 1-3 1-4 2-5 2-9 3-6 4-7 4-8 5-8 5-9 6-7 6-9 7-8

Do đỉnh 0 có bậc 3 nên đồ thị trên không có chu trình Euler

Có chu trình Hamilton 0 2 5 9 6 7 8 4 1 3 0

* Đồ thị 2:

0-1 0-2 0-3 1-3 0-3 2-5 5-6 3-6 4-7 4-8 5-8 5-9 6-7 6-9 8-8

Có chu trình Euler 0-1-3-0-6-9-5-6-7-4-8-8-5-2-0

Không có chu trình Hamilton

* Đồ thị 3:

0-1 1-2 1-3 0-3 0-4 2-5 2-9 3-6 4-7 4-8 5-8 5-9 6-7 6-9 7-8

Do đỉnh 0 có bậc 3 nên đồ thị không có chu trình Euler

Có chu trình Hamilton 0 1 2 9 5 8 4 7 6 3 0

* Đồ thị 4

4-1 7-9 6-2 7-3 5-0 0-2 0-8 1-6 3-9 6-3 2-8 1-5 9-8 4-5 4-7

Do đỉnh 0 có bậc 3 nên đồ thị không có chu trình Euler. Đồ thị cũng không có chu trình Hamilton.

Bài 2:

Đồ thị có V đỉnh, không có 2 cạnh nào song song với nhau nên đồ thị sẽ có thể có cạnh nối giữa các đỉnh.

Đồ thị có E cạnh nên số đồ thị có V đỉnh và E cạnh là .

Bài 4:

Chứng minh chiều thuận: Đồ thị hai màu không có chu trình lẻ

Do đồ thị là hai màu, nên giữa hai đỉnh liên tiếp xong chu trình trên có hai màu khác nhau. Giả sử đồ thị hai màu có chu trình lẻ, khi đó tồn tại một chu trình . Nếu xét từ đầu chu trình, có khác màu với , nhưng khi xét từ cuối chu trình thì có cùng màu với , chứng tỏ giả sử trên bị bác bỏ. Do đó đồ thị hai màu không có chu trình lẻ.

Chứng minh chiều nghịch: Đồ thị không có chu trình lẻ thì là đồ thị hai màu

* Nếu đồ thị không có chu trình, hiển nhiên nó là đồ thị hai màu vì chỉ có duy nhất 1 đường đi từ một đỉnh đến một đỉnh khác.
* Nếu đồ thị có chu trình chẵn: Ta chọn 1 đỉnh, tô màu xanh cho nó và tô màu đỏ với các đỉnh kề với nó. Lặp lại quá trình trên, do đồ thị chỉ tồn tại chu trình chẵn nên số đỉnh trong chu trình là một số chẵn, vì thế sẽ không có hai đỉnh nào có cùng màu.

Bài 5:

Xét một đồ thị vô hướng liên thông G không có điểm articulation nào. Xét một cặp đỉnh u, v, do đồ thị liên thông nên luôn tồn tại một đường đi M nối u đến v.

Giả sử ta xóa đi các đỉnh thuộc đường đi trên, do đồ thị không có điểm articulation nên đồ thị vẫn sẽ liên thông, do đó sẽ có một đường đi N nối u đến v mà nó không giao với M do chúng không có chung đỉnh. Do đồ thị ban đầu vô hướng, nên ta có thể suy ra nó tồn tại hai đường đi M, N từ đỉnh u đến đỉnh v bất kì mà không cắt nhau, do đó đồ thị trên là đồ thị biconnected.